Numerik

Ingenieurinformatik Teil 2, Sommersemester 2026

David Straub

Gliederung

1. Einführung in Matlab
2. Arbeiten mit Arrays
3. Funktionen und Kontrollstrukturen
4. Analysis
5. Lineare Algebra
6. **Differentialgleichungen**
7. Einführung in Simulink

Fahrplan: Differentialgleichungen

Einheit 1 – Heute → Motivation und Herleitung am Ingenieurbeispiel → Begriffe: Ordnung, Anfangswertproblem → Analytische vs. numerische Lösung → Euler'sches Polygonzugverfahren in Matlab

Einheit 2 → Standardform für numerische Verfahren → Numerische Lösungsverfahren → Lösung in Matlab

Einheit 3 → Anwendungen

Motivation

Schnellladen einer Batteriezelle

Beim Schnellladen steigt die Temperatur – aber wie schnell, und wie hoch?

Wärmeleistung durch Innenwiderstand:

$$P_{\text{Verlust}} = I^2 \cdot R_{\text{innen}}$$

Größe	Wert
C_{th} (Wärmekapazität)	$100\,\text{J/K}$
R_{innen}	$0{,}05\,\Omega$
I	$50\,\text{A} \to P = 125\,\text{W}$
T_0	$25\,°\text{C}$

Fall 1: Konstanter Strom, keine Wärmeabgabe

Die gesamte Verlustleistung heizt die Zelle auf:

$$C_{\text{th}}\,\dot{T} = P_{\text{Verlust}} = \text{const}$$

$\dot{T}$ ist konstant $\to$ direktes Integral:

$$T(t) = T_0 + \frac{P_{\text{Verlust}}}{C_{\text{th}}}\,t$$

Mit den Zahlenwerten: T steigt um $1{,}25\,\text{K/s}$ – nach 60 s bereits $+75\,\text{K}$.

Realistisch?

Fall 2: Variabler Strom $I(t)$

Ein reales Ladeprofil: $I(t)$ ist nicht konstant.

$$C_{\text{th}}\,\dot{T} = P(t) = I(t)^2 \cdot R$$

$P(t)$ ist nun eine gemessene Kurve $\to T(t) = T_0 + \frac{1}{C_{\text{th}}} \int_0^t P(\tau)\, d\tau$

Das kennen wir: **numerisch mit `trapz`**.

```
T_end = T0 + trapz(t, P) / C_th
```

Aber: wir erhalten nur den Endwert oder müssen $T(t)$ mühsam schrittweise berechnen.

Und noch etwas fehlt…

Fall 3: Wärmeabgabe dazu

Die Zelle gibt Wärme an die Umgebung ab:

$$P_{\text{ab}} = \lambda\,(T - T_\infty)$$

Energiebilanz: ein − aus:

$$C_{\text{th}}\,\dot{T} = P_{\text{Verlust}} - \lambda\,(T - T_\infty)$$

Problem: P_{ab} hängt von $T(t)$ selbst ab – der Wert den wir suchen!

$$\int \dots\, dt \quad \text{geht nicht mehr}$$

Wir brauchen etwas Neues: eine **Differentialgleichung**.

Die Differentialgleichung der Batteriezelle

$$\boxed{C_{\text{th}}\,\dot{T} = P - \lambda\,(T - T_\infty)}$$

Größe	Bedeutung	Wert
C_{th}	Wärmekapazität	100 J/K
λ	Wärmeübergangskoeffizient	2 W/K
$P = I^2 R$	Verlustleistung	125 W
T_∞	Umgebungstemperatur	25 °C
T_0	Starttemperatur	25 °C

Gleichung vs. Differentialgleichung

Algebraische Gleichung – Lösung ist eine **Zahl**:

$$2x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1{,}5}$$

Differentialgleichung – Lösung ist eine **Funktion**:

$$C_{\mathrm{th}}\,\dot{T} = P - \lambda\,(T - T_\infty) \quad \Rightarrow \quad T(t) = \ ?$$

Die gesuchte Funktion $T(t)$ muss die Gleichung für **alle** t erfüllen.

Analytische Lösung

Analytische Lösung: Ansatz

Die Batterie-DGL lässt sich umschreiben:

$$\dot{T} = -\frac{\lambda}{C_{\text{th}}}\,T + \frac{P + \lambda T_\infty}{C_{\text{th}}}$$

Ansatz: $T(t) = A + B\,e^{\alpha t}$

Einsetzen liefert $\alpha = -\dfrac{\lambda}{C_{\text{th}}}$ und die Konstante A aus dem Gleichgewicht.

Mit Anfangsbedingung $T(0) = T_0$:

$$T(t) = T_\infty + \frac{P}{\lambda} + \left(T_0 - T_\infty - \frac{P}{\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{C_{\text{th}}}\,t}$$

Gleichgewichtstemperatur

Für $t \to \infty$ ändert sich T nicht mehr: $\dot{T} = 0$

$$0 = P - \lambda\,(T^* - T_\infty) \quad \Rightarrow \quad T^* = T_\infty + \frac{P}{\lambda}$$

Mit den Tabellenwerten:

$$T^* = 25 + \frac{125}{2} = 87{,}5\,°\text{C}$$

Knapp unter der typischen Grenztemperatur – bei doppeltem Strom wäre $T^* = 150\,°\text{C}$.

? Aufgabe: Analytische Lösung plotten

Plotten Sie die analytische Lösung der Batterie-DGL:

$$T(t) = T_\infty + \frac{P}{\lambda} + \left(T_0 - T_\infty - \frac{P}{\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{C_{\text{th}}}\,t}$$

Verwenden Sie die Parameterwerte aus der Tabelle. Plotten Sie außerdem:

- die Gleichgewichtstemperatur T^* als horizontale Linie
- die Lösung für $C_{\text{th}} = 50$ und $C_{\text{th}} = 200$ (sonst gleiche Parameter)

Was beobachten Sie?

Begriffe

Ordnung einer Differentialgleichung

Die **Ordnung** ist die höchste vorkommende Ableitung.

Gleichung	Ordnung
$\dot{T} = P - \lambda(T - T_\infty)$	1
$m\ddot{x} + kx = 0$	2
$EI\,x'''' = q(x)$	4

Bei einer DGL n-ter Ordnung sind n **Anfangsbedingungen** nötig, um die Lösung eindeutig festzulegen.

Anfangswertproblem

Anfangswertproblem (AWP): Alle Bedingungen sind zum selben Zeitpunkt t_0 gegeben.

$$C_{\text{th}}\,\dot{T} = P - \lambda(T - T_\infty), \qquad T(0) = T_0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0, \qquad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Randwertproblem: Bedingungen an verschiedenen Stellen (z.B. Balken mit festen Enden) – kommt hier nicht vor.

Gewöhnliche vs. partielle DGL

Gewöhnliche DGL (ODE): eine unabhängige Variable

$$C_{\text{th}}\,\dot{T}(t) = \ldots$$

Partielle DGL (PDE): mehrere unabhängige Variablen

$$\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}(x, y, z, t) = \lambda\,\nabla^2 T$$

→ Wärmeleitung *innerhalb* eines Körpers: Temperatur hängt von Ort **und** Zeit ab.

In dieser Vorlesung behandeln wir ausschließlich **ODEs**.

Numerische Lösung

Wann versagt die analytische Lösung?

Die Batterie-DGL mit konstantem Strom ist analytisch lösbar.

Was aber, wenn der **Ladestrom zeitveränderlich** ist – z.B. ein gemessenes Ladeprofil $I(t)$?

$$C_{\mathrm{th}}\,\dot{T} = I(t)^2 \cdot R - \lambda\,(T - T_\infty)$$

$\rightarrow$ Keine geschlossene analytische Lösung mehr möglich.

Numerische Methoden liefern stattdessen eine Näherungslösung als Zahlenfolge:

$$t_0,\, t_1,\, t_2,\, \ldots \quad \longrightarrow \quad T_0,\, T_1,\, T_2,\, \ldots$$

Euler'sches Polygonzugverfahren

Idee: Die Ableitung $\dot{T}$ ist bekannt – sie steht auf der rechten Seite der DGL.

Ersetze die Ableitung durch einen Differenzenquotienten:

$$\dot{T} \approx \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$$

Umgestellt: der nächste Wert ergibt sich aus dem aktuellen:

$$T(t + \Delta t) = T(t) + \underbrace{\dot{T}(t)}_{\text{rechte Seite}} \cdot \Delta t$$

In Matlab: `T(n+1) = T(n) + dT_dt * dt`

Euler'sches Polygonzugverfahren in Matlab: Schema

Anfangswertproblem: $\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n,\, y_n) \cdot \Delta t$$

```
t = t0 : dt : tend
y = zeros(size(t))
y(1) = y0

for n = 1 : length(t)-1
    dy_dt  = f( t(n), y(n) )      % rechte Seite auswerten
    y(n+1) = y(n) + dy_dt * dt   % Euler-Schritt
end
```

? Aufgabe: Euler-Verfahren

Implementieren Sie das Euler-Verfahren für die Batterie-DGL. Wie lautet $f(t, y)$ in diesem Fall?

(a) Vergleichen Sie die numerische Lösung mit der analytischen in einem Plot.

(b) Variieren Sie die Schrittweite `dt`: 10 s, 100 s, 500 s. Was passiert mit der Genauigkeit?

(c) Ersetzen Sie P durch ein abklingendes Ladeprofil:

$$I(t) = I_0 \, e^{-t/\tau}, \quad P(t) = R \cdot I(t)^2$$

mit $I_0 = 50\,\mathrm{A}$, $\tau = 1800\,\mathrm{s}$, $R = 0{,}05\,\Omega$. Vergleichen Sie mit der Lösung bei konstantem $P = RI_0^2$.

Zusammenfassung

- Eine **Differentialgleichung** beschreibt die zeitliche Änderung einer Größe
- Die Lösung ist eine **Funktion**, keine Zahl
- Analytische Lösungen existieren nur für einfache Sonderfälle
- Für den allgemeinen Fall: **numerische Lösungsverfahren**
- Das Euler'sche Polygonzugverfahren ist die einfachste numerische Methode